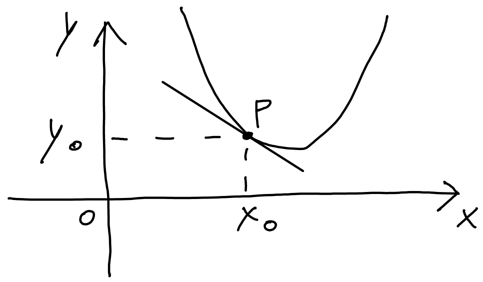
Formule di sdoppiamento

Nel caso in cui si cerchi l'equazione della retta tangente alla parabola in un suo punto, cioè passante per un punto $P(x_0, y_0)$ appartenente alla parabola, si ottiene un risultato abbastanza facile da ricordare.



La tangente in P è una delle rette di equazione $y - y_0 = m(x - x_0)$.

Mettendo a sistema con l'equazione della parabola si ottiene:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y - y_0 = m(x - x_0) \end{cases}, \quad \text{da cui}$$

$$ax^2 + bx + c = mx - mx_0 + y_0$$

$$ax^2 + (b - m)x + mx_0 - y_0 + c = 0$$

Le due soluzioni di questa equazione devono essere entrambe uguali a x_0, quindi, dato che la somma delle soluzioni di una equazione di 2° grado è uguale a $-\frac{b}{a}$, si ha:

$$-\frac{b-m}{a} = 2x_0$$

Da questa equazione si può ottenere la pendenza m della retta tangente:

$$m = 2ax_0 + b$$

Sostituendo nell'equazione del fascio di rette si ottiene:

$$y - y_0 = (2ax_0 + b)(x - x_0)$$

che è l'equazione della tangente nel punto della parabola di ascissa x_0.

Questa equazione si può trasformare nella forma:

$$\frac{y - y_0}{2} = ax_0 x - ax_0^2 + b\,\frac{x - x_0}{2}$$

Usando l'equazione della parabola

$y_0 = a x_0^2 + b x_0 + c$, si può ricavare $-a x_0^2 = b x_0 + c - y_0$ e, sostituendo, ottenere:

$$\frac{y - y_0}{2} = a x_0 x + b x_0 + c - y_0 + b\left(\frac{x - x_0}{2}\right),$$

$$\frac{y - y_0}{2} + y_0 = a x_0 x + b\left(\frac{(x - x_0)}{2} + x_0\right) + c$$

e infine

$$\frac{1}{2}(y + y_0) = a x_0 x + b\,\frac{1}{2}(x + x_0) + c$$

Si nota che questa equazione si può ottenere da quella della parabola $y = ax^2 + bx + c$ con la sostituzione

$$x^2 \longrightarrow x x_0$$

$$x \longrightarrow \frac{1}{2}(x + x_0)$$

$$y \longrightarrow \frac{1}{2}(y + y_0)$$

(formule di sdoppiamento)

Esempio

Determina la tangente alla parabola

di equazione $y = x^2 + 2x + 3$, nel suo punto di ascissa 0.

Il punto ha coordinate $P(0,3)$.

Usando le formule di sdoppiamento si ottiene:

$$\frac{1}{2}(y+3) = 1 \cdot x \cdot 0 + 2 \cdot \frac{1}{2}(x+0) + 3$$

e, riordinando i termini:

$$y + 3 = 2x + 6, \quad y = 2x + 3$$

che è l'equazione della tangente cercata.